

Épreuve de rattrapage

Durée : 1h30

Exercice 1.

Préciser le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)},$$

et calculer sa somme.

Exercice 2.

On considère la suite de fonctions (f_n) définies par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \geq 0.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .

2. On pose

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x$$

a. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} |g_n(n)|$.

b. Que peut-on déduire quant à la convergence uniforme de la suite (f_n) .

Exercice 3.

On considère la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{(n+x)^2}$$

1. Étudier la convergence de cette série sur \mathbb{R}^+ .

2. Montrer que la somme $S(x)$ de cette série est continue sur \mathbb{R}^+ .

3. Prouver que la fonction S est décroissante et positive sur \mathbb{R}^+ .

4. Préciser la valeur de S à l'origine et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.

5. Établir que S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .